Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Didaktik der Informatik
Dr. Thomas Kleinbauer

Übungen zur Vorlesung Grundlagen von Informatiksystemen
Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 10
Abgabe bis Donnerstag, 02. Februar 2023, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 Addition von Binärzahlen (4 Punkte)

Addiert man zwei Binärzahlen gleicher Länge, deren Bitfolgen genau zueinander gekippt sind, wie z.B. 001010 und 110101, dann hat die resultierende Bitfolge ebenfalls dieselbe Länge und besteht ausschließlich aus Einsen. Beispiel:

$$\begin{array}{r} 001010 \\ +\ 110101 \\ \hline 111111 \end{array}$$

Beweisen Sie die folgende Formalisierung dieser Aussage:

Sei $a_{n-1}, \ldots, a_0$ eine Folge von Bits. Dann gilt:

$$\langle a_{n-1} \ldots a_0 \rangle_2 + \langle (1 - a_{n-1}) \ldots (1 - a_0) \rangle_2 = \langle \underbrace{1 \ldots 1}_{n-\text{mal}} \rangle_2$$

NB: Hier ist vollständige Induktion nicht unbedingt nötig, der Beweis ist recht einfach, wenn man sich daran erinnert, dass man den Dezimalwert einer Binärzahl $\langle b_{n-1} \ldots b_0 \rangle_2$ als Summe ausdrücken kann: $\langle b_{n-1} \ldots b_0 \rangle_2 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 2^i$ (s. auch Folie 48).

Tipp: Machen Sie sich auch noch einmal klar, welchen Dezimalwert die Binärzahl $\langle \underbrace{1 \ldots 1}_{n-mal} \rangle_2$ (in Abhängigkeit von n) hat.

Aufgabe 2 Vorzeichenerweiterung (4 Punkte)

In einer früheren Übung wurde gesagt, dass eine Zahl im Zweierkomplement ihren Wert nicht verändert, wenn man das führende Bit dupliziert. Beweisen Sie folgende Formalisierung dieser Aussage:

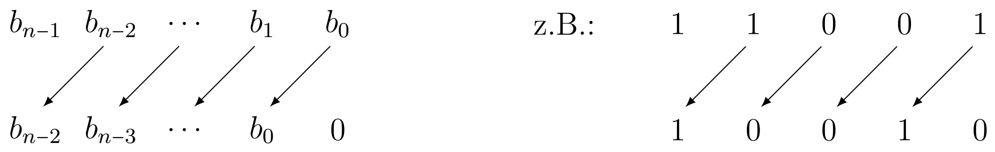
Sei $a_{n-1}, \ldots, a_0$ eine Folge von Bits. Dann gilt:

$$\langle\langle a_{n-1} a_{n-1} \ldots a_0 \rangle\rangle_2 = \langle\langle a_{n-1} \ldots a_0 \rangle\rangle_2$$

NB: Vollständige Induktion ist hier nicht nötig, halten Sie sich lieber an die Definition des Zweierkomplements und beweisen Sie die Aussage durch Fallunterscheidung nach dem Wert des führenden Bits. Nutzen Sie hierbei wie schon bei Aufgabe 1 gerne die Darstellung des Dezimalwerts einer Binärzahl mittels einer Summe.

Aufgabe 3 Arithmetic Logic Units (8 Punkte)

Die Funktion $shiftl : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ sei wie folgt definiert: $shiftl(b_{n-1}, \ldots, b_0) = b_{n-2}, \ldots, b_0, 0$. Das heißt, $shiftl$ entfernt das führende Bit der Eingabefolge und fügt stattdessen am rechten Ende eine Null ein, wie im folgenden Bild veranschaulicht:



Entwerfen und zeichnen Sie eine einfache Arithmetic Logic Unit, die in Abhängigkeit von zwei Steuerbits s_1 und s_0 folgende Funktionen berechnet:

$s_1 s_0$	$f_{\langle s_1 s_0 \rangle_2}$
00	$0 \ldots 0$
01	$\langle a_{n-1} \ldots a_0 \rangle_2 + \langle b_{n-1} \ldots b_0 \rangle_2$
10	$shiftl(0, a_{n-1}, \ldots, a_0)$
11	$1 \ldots 1$

Dabei sollen $a_{n-1}, \ldots, a_0$ und $b_{n-1}, \ldots, b_0$ wie üblich zu den Eingangsknoten des Schaltkreises gehören.