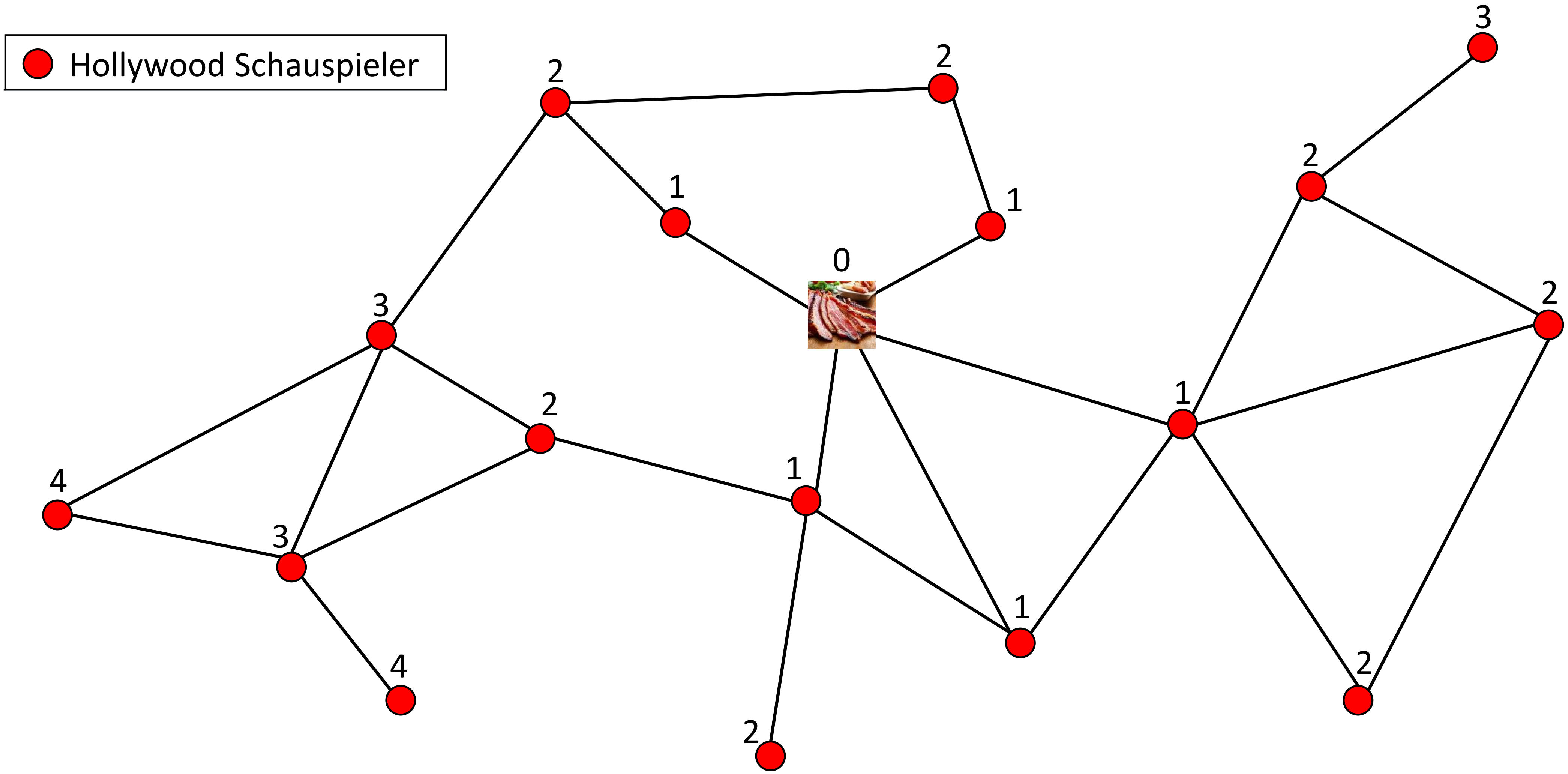
Graphen

“Six Degrees of Kevin Bacon”

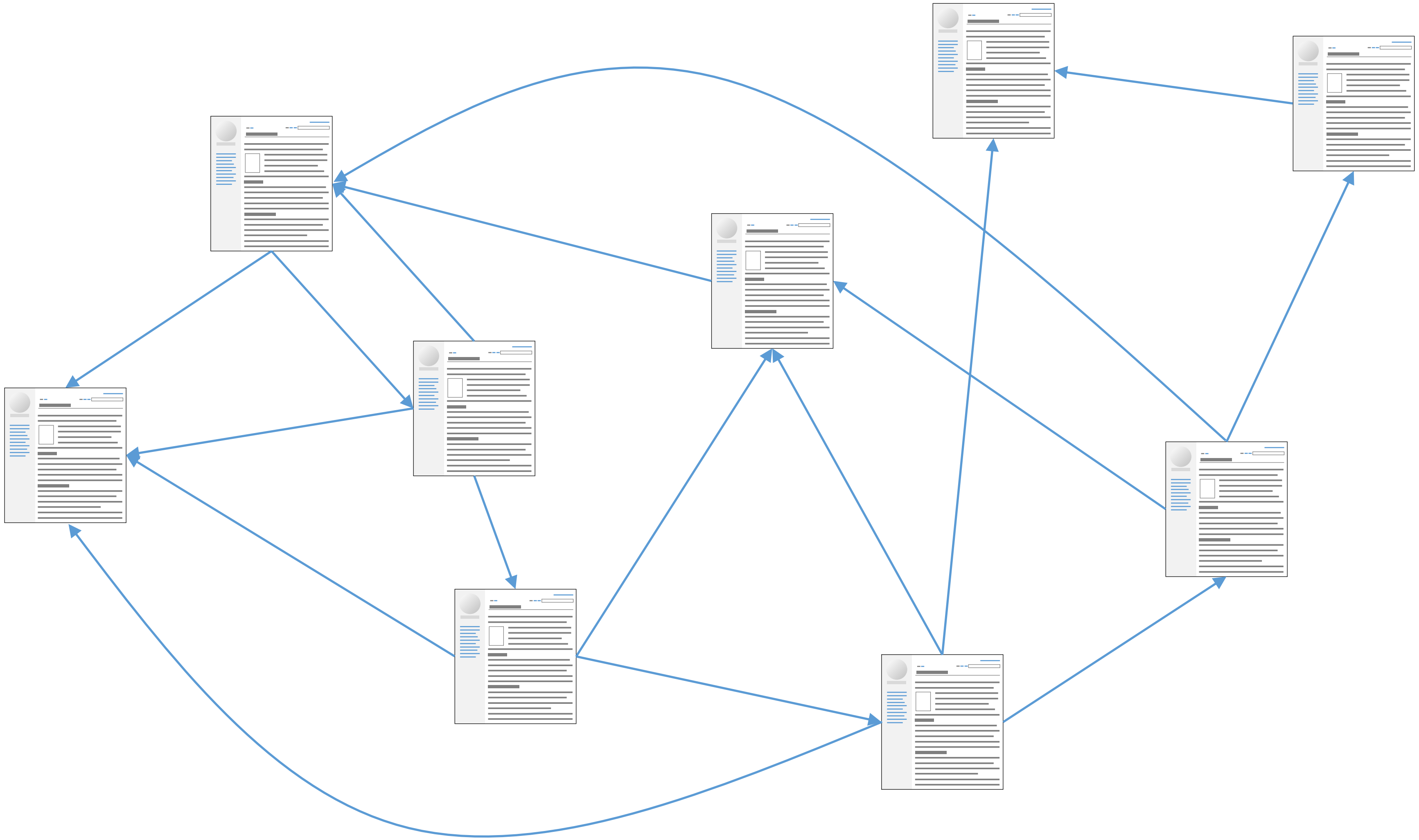
- Bekannter amerikanischer Schauspieler
  - Footloose (1984)
  - Mystic River (2003)
  - The Woodsman (2004)
  - Taking Chance (2009)
  - X-Men: First Class (2011)
  - The Following (2014)
  - …und viele andere Filme…sehr viele…

Not Kevin Bacon

Visualisierung der “Baconzahl” BKZ



Links in Wikipedia-Artikeln

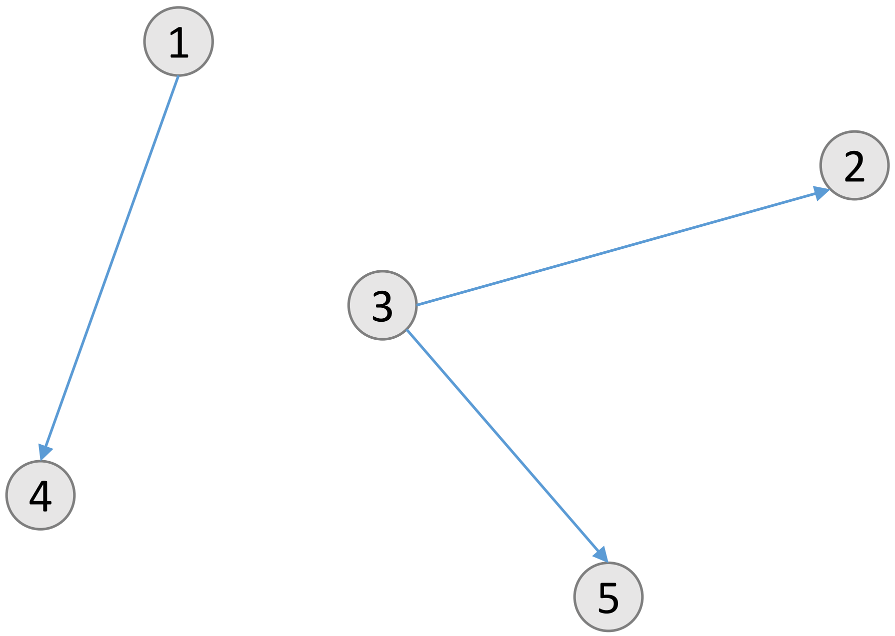


Graphen

- **Definition.** Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei V eine Menge von Knoten ist. Wir unterscheiden zwei Arten von Graphen:
  - *Gerichterer Graph*. Dann ist $E \subseteq V \times V$.
  - *Ungerichterer Graph*. Dann ist $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} | v_1, v_2 \in V\}$.

Quiz

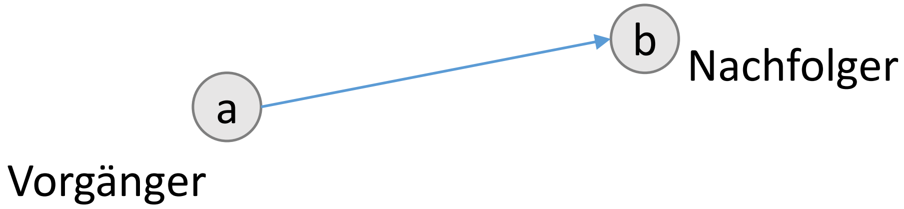
- Wie lauten die Knotenmenge V und die Kantenmenge E dieses Graphen?
- $V = \{1,2,3,4,5\}$
- $E = \{(1,4), (3,2), (3,5)\}$

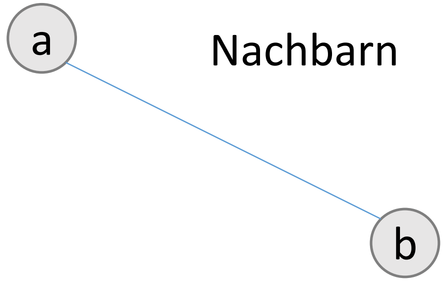


Vorgänger, Nachfolger, Ingrad, Outgrad, Nachbar

- **Definition.** Seien a und b Knoten in einem Graphen G. Ist G ein...
  - ...gerichteter Graph und (a, b) eine Kante in G, so heißt
    - a *direkter Vorgänger* von b
    - b *direkter Nachfolger* von a

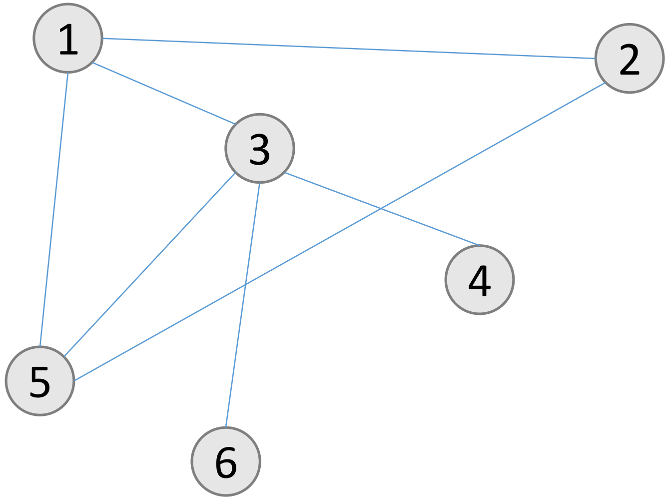
    Die Anzahl der direkten Vorgänger eines Knotens heißt dessen *Ingrad*, die Anzahl der direkten Nachfolger sein *Outgrad*.
  - ...ungerichteter Graph und $\{a, b\}$ eine Kante in G, so nennt man a und b *Nachbarn*.





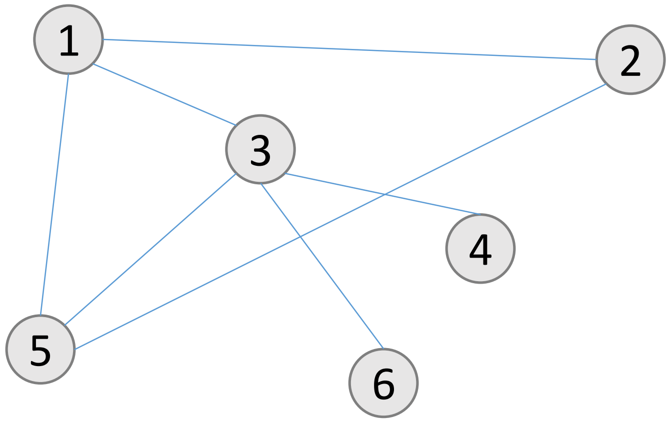
Pfade

- **Definition.** Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter/ungerichteter Graph. Eine Folge von Knoten $v_1, \ldots, v_{l+1}$ heißt *Pfad (in G),* falls (v_i, v_{i+1})/ $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 1, \ldots, l$. Wir nennen l die *Länge* des Pfads.
- Beispiel:
- 5,2,1,3,4 ist ein Pfad
- 1,2,6,3 ist kein Pfad.



Zyklen

- **Definition.** Ein Pfad der Form $v_1, \dots, v_l, v_1$ heißt *Zyklus*. Ein Graph, in dem es keine Zyklen gibt, heißt *zykelfrei*.
- Beispiel:
  - Der Pfad 5,3,1,5 ist ein Zyklus.
  - Der Pfad 5,3,1 ist kein Zyklus.



- Sprechweise: Ist $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots v_k$ ein Pfad p und ist der Pfad $v_i, \dots, v_j$ ein Zyklus, so sagen wir: der Pfad p *enthält* einen Zyklus.

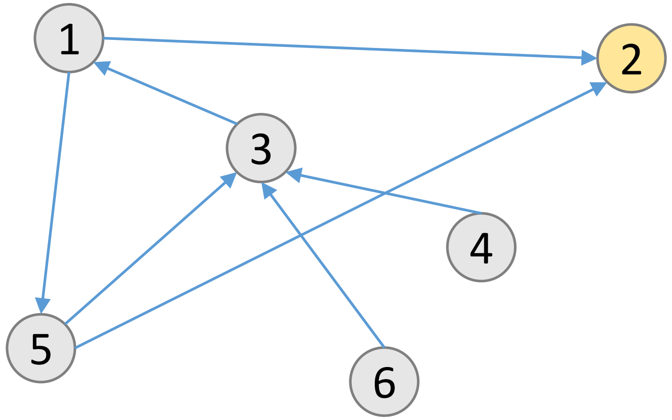
Maximale Pfadlänge in zykelfreien Graphen

- **Lemma.** Sei $G = (V, E)$ ein zykelfreier Graph. Für jeden Pfad $v_1, \dots, v_k$ in G gilt, dass seine Länge kleiner als die Anzahl der Knoten in G ist: $k - 1 < |V|$.
- Beweis per Widerspruch. Sei $p = v_1, \dots, v_k$ ein Pfad in G und $k > |V|$. Da es im Graphen nur $|V|$ verschiedene Knoten gibt, muss es Indices $1 \leq i < j \leq k$ geben, sodass $v_i = v_j$. Aber dann enthält G einen Zyklus im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Höhe und Tiefe

- **Definition.** Ein Knoten mit Ingrad 0 heißt *Quelle*, ein Knoten mit Outgrad 0 *Senke*.
- **Definition.** Die Länge eines längsten Pfads von einer Quelle zu einem Knoten heißt *Höhe* des Knotens, falls ein solcher Pfad existiert.
- **Definition.** Die Länge eines kürzestens Pfads von einer Quelle zu einem Knoten heißt *Tiefe* des Knotens, falls ein solcher Pfad existiert.

Quiz: Welche Tiefe/Höhe hat der Knoten 2?



- Kürzeste Pfade: 6,3,1,2 und 4,3,1,2 $\Rightarrow \text{Tiefe}(2) = 3$
- Längste Pfade von 6 oder 4 zu 2 gibt es nicht $\Rightarrow \text{Höhe}(2)$ ist nicht definiert.

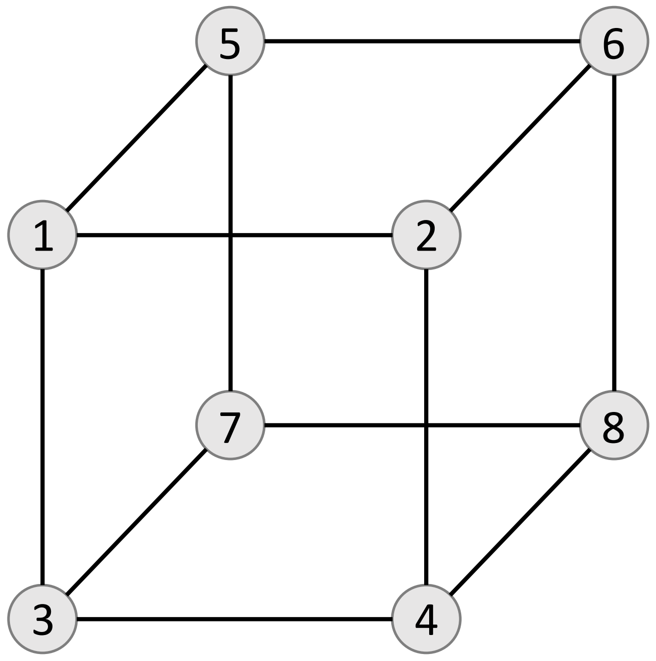
Höhe und Tiefe in zykelfreien Graphen

- **Lemma.** In einem zykelfreien Graphen $G = (V, E)$ hat jeder Knoten eine Höhe und eine Tiefe.
- Beweis. Sei $v \in V$ ein beliebiger Knoten in G und sei $v_1, \dots v_k, v$ ein längster Pfad in G, der in v endet. Dann muss v_1 eine Quelle sein, andernfalls hätte v_1 einen direkten Vorgänger v_0, und dann wäre $v_0, v_1, \dots, v_k, v$ ein längerer Pfad in G, der in v endet. Also hat v eine Höhe in G.
  Betrachten wir alle Pfade von einer Quelle in G zu v, muss es mindestens einen kürzesten geben. Also hat v eine Tiefe in G. *qed.*

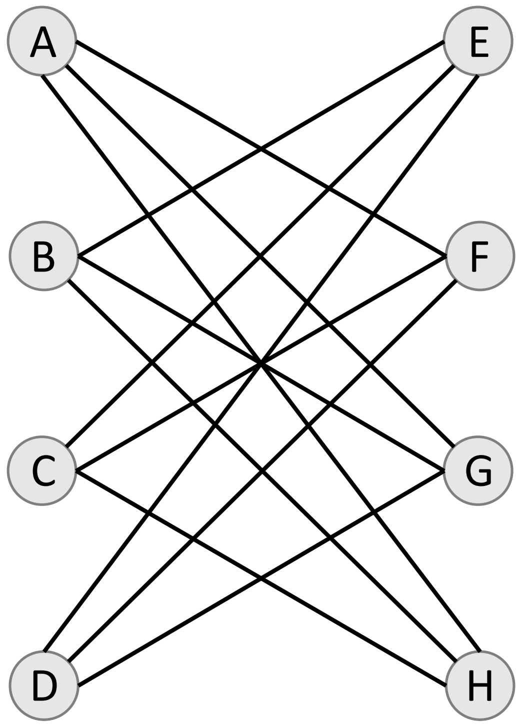
Implikationen für Vorgänger und Nachfolger

- **Korollar.** Sei v ein Knoten in einem zykelfreien, gerichteten Graphen mit Höhe h und Tiefe t.
  1. Wenn ein direkter Vorgänger von v existiert, so ist dessen Höhe höchstens $h - 1$ und seine Tiefe mindestens $t - 1$.
  2. Wenn ein direkter Nachfolger von v exisiert, so ist dessen Höhe mindestens $h + 1$ und seine Tiefe höchstens $t + 1$.

Strukturell gleiche Graphen



$1 \mapsto A$
$2 \mapsto F$
$3 \mapsto G$
$4 \mapsto D$
$5 \mapsto H$
$6 \mapsto C$
$7 \mapsto B$
$8 \mapsto E$



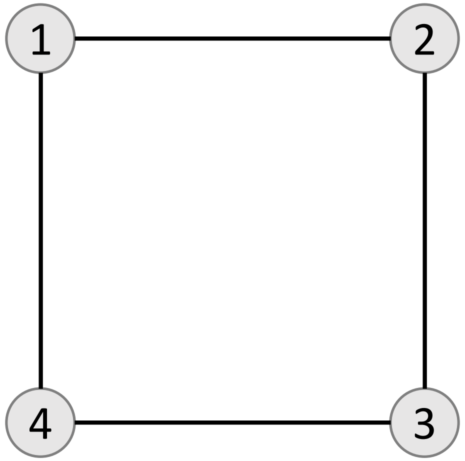
Graphisomorphismus

- **Definition.** Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ gerichtete Graphen. Existiert eine bijektive Abbildung $p: V_1 \to V_2$, sodass für alle $(v_1, v_2) \in E_1$ gilt $\big(p(v_1), p(v_2)\big) \in E_2$, so heißen G_1 und G_2 *isomorph*.
  (Für ungerichtete Graphen gilt die Definition analog, nur dass wir $\{v_1, v_2\}$ statt (v_1, v_2) und $\{p(v_1), p(v_2)\}$ statt $\big(p(v_1), p(v_2)\big)$ schreiben.)
  Die Abbildung p heißt dann *Isomorphismus*.

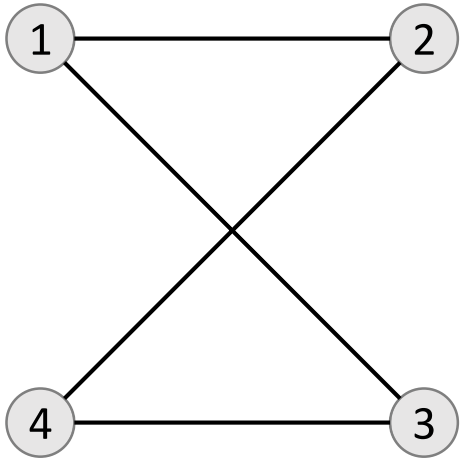
Quiz

- Sind die beiden Graphen $G_1 = (V, E_1)$ und $G_2 = (V, E_2)$ mit $\mathrm{V} = \{1,2,3,4\}$, $E_1 = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}\big\}$ und $E_2 = \big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\big\}$ isomorph?

G_1



G_2

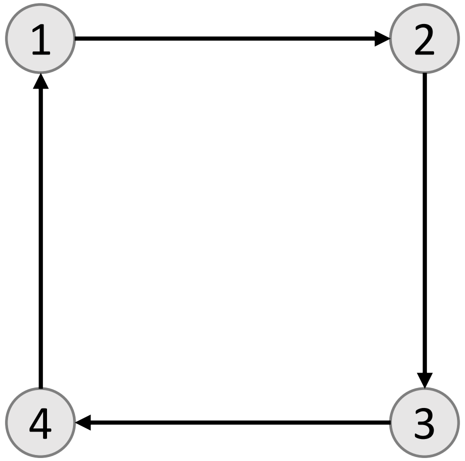


- Ja, da p mit $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 4, p(4) = 3$ ein Isomorphismus ist.

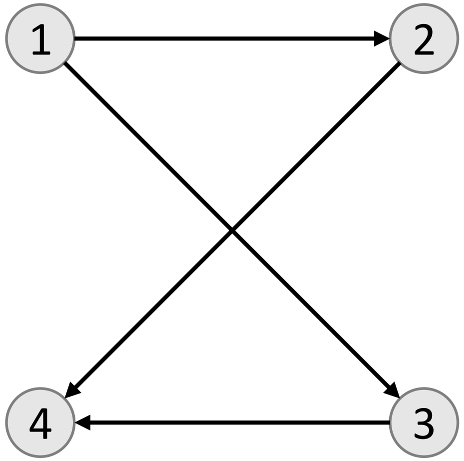
Quiz

- Sind die beiden Graphen $G_1 = (V, E_1)$ und $G_2 = (V, E_2)$ mit $\mathrm{V} = \{1,2,3,4\}$, $E_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$ und $E_2 = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,4)\}$ isomorph?

G_1



G_2



- Nein, da G_2 einen Knoten mit zwei direkten Vorgängern besitzt (4), G_1 aber nicht.