**Universität des Saarlandes**
**Fakultät für Mathematik und Informatik**
**Didaktik der Informatik**
Dr. Thomas Kleinbauer

**Übungen zur Vorlesung Grundlagen von Informatiksystemen**
Wintersemester 2022/23

**Übungsblatt 4**
Abgabe bis Donnerstag, 24. November 2022, 8:30 Uhr

---

## Aufgabe 1 Rekursion (2 Punkte)

Sei $M$ die Menge aller Menschen und $\mathit{kindvon} \subseteq M \times M$ eine Relation, die genau dann ein Paar $(k, e)$ enthält, wenn $e$ ein Elternteil von $k$ ist.

Geben Sie eine rekursive Definition der Menge $N$ der Nachfahren *Karls des Großen* an.

NB: Auch wenn nur die allerwenigsten Menschen als ihre eigenen Nachfahren gelten, gehen Sie davon aus, dass Karl der Große selbst in $N$ enthalten ist.

## Aufgabe 2 Logische Subjunktion (3+3+3)

In der Vorlesung wurde eingeführt, dass die Aussage $(X_1 \wedge X_2)$ genau dann wahr ist, wenn sowohl die Aussage $X_1$ als auch die Aussage $X_2$ wahr ist, während die Aussage $(X_1 \vee X_2)$ bereits dann wahr ist, wenn $X_1$ wahr ist oder $X_2$ wahr ist.
Neben Konjunktion und Diskunktion kann man auch Implikation mit einem vollständig geklammerten Boole'schen Ausdruck modellieren: die Aussage $(X_1 \rightarrow X_2)$ sei genau dann wahr, wenn $X_2$ aus $X_1$ folgt. Die zugehörige binäre Schaltfunktion „$\rightarrow$" definieren wir wie folgt:

| $x_1$ | $x_2$ | $\rightarrow(x_1, x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

1. Geben Sie für alle möglichen Belegungen der Variablenmenge $V = \{X_1, X_2\}$ die Werte der drei v.g. Boole'schen Ausdrücke $(\sim X_1)$, $(\sim X_2)$ und $((\sim X_2) \rightarrow (\sim X_1))$ an. Was fällt Ihnen danach für den dritten dieser Ausdrücke auf?

2. Betrachten Sie die folgenden vier Aussagen:

   - Wer wirkliches Interesse hat, studiert fleißig.
   - Niemand ist ein guter Lehrer, wenn er seine Schüler nicht motivieren kann.
   - Niemand, der kein wirkliches Interesse hat, kann seine Schüler motivieren.
   - Niemand, außer einem guten Lehrer, verdient Bewunderung.

(a) Modellieren Sie diese Aussagen als vollständig geklammerte Boole'sche Ausdrücke. Welche atomaren Aussagen sollen dabei durch Variablen Ihrer Menge $V$ repräsentiert werden?

(b) Welche Eigenschaften muss jemand notwendigerweise besitzen, der Bewunderung verdient hat?

3. Geben Sie einen zu $(X_1 \to X_2)$ äquivalenten vollständig geklammerten Boole'schen Ausdruck an, in dem höchstens die Symbole $(, ), \sim, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ sowie Variablen $X_i \in V$ vorkommen. Weisen Sie die Äquivalenz nach.

**Aufgabe 3 Allgemeine Assoziativgesetze (4 Punkte)**

Seien $b_0, \ldots, b_k$ jeweils vollständig geklammerte Boole'sche Ausdrücke. Beweisen Sie eine der beiden folgenden Aussagen für alle $k \geq 1$ mittels vollständiger Induktion über $k$:

- Ist $b'$ ein beliebiger vollständig geklammerter Boole'scher Ausdruck, der nur aus runden Klammern, dem Symbol $\vee$ und den Ausdrücken $b_0, \ldots, b_k$ besteht, dann gilt $b' \equiv 1$ genau dann, wenn $b_i \equiv 1$ für mindestens ein $i$ gilt, wobei $0 \leq i \leq k$.

- Ist $b'$ ein beliebiger vollständig geklammerter Boole'scher Ausdruck, der nur aus runden Klammern, dem Symbol $\wedge$ und den Ausdrücken $b_0, \ldots, b_k$ besteht, dann gilt $b' \equiv 1$ genau dann, wenn $b_i \equiv 1$ für alle $0 \leq i \leq k$ gilt.

(Anmerkung: Sie brauchen nicht beide Aussagen zu beweisen, sondern können frei wählen, welche Sie beweisen.)

**Aufgabe 4 Allgemeine De Morgan'sche Regeln (4 Punkte)**

Beweisen Sie eine der beiden folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion über $k$:

- $\sim \bigwedge_{i=1}^{k} b_i \equiv \bigvee_{i=1}^{k} (\sim b_i)$
- $\sim \bigvee_{i=1}^{k} b_i \equiv \bigwedge_{i=1}^{k} (\sim b_i)$

(Anmerkung: Sie brauchen nicht beide Aussagen zu beweisen, sondern können frei wählen, welche Sie beweisen.)

(Tipp: Bedenken Sie die Allgemeinen Assoziativgesetze aus Aufgabe 3. Können Sie im Induktionsschritt die Regeln von De Morgan aus der Vorlesung (Folie 88) gebrauchen?)