Mathematik für das Lehramt
Informatik I

WS 2020/21

Klausurvorbereitung

Die folgenden Aufgaben unterstützen Sie zusätzlich zu den Übungslättern bei der Vorbereitung auf die Abschluss-Klausur. Die Bearbeitung der Aufgaben ist *freiwillig.*

Aufgabe 1

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 3, 6, 9\}$ und $B = \{1, 4, 9\}$.

a) Bestimmen Sie Vereinigung und Schnitt der beiden Mengen sowie das kartesische Produkt von A und B. Bestimmen Sie ferner die Potenzmenge von B.

b) Finden Sie eine Relation auf A, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Stellen Sie die Relation als Graph dar und erzeugen Sie einen dazu isomorphen Graphen.

c) Recherchieren Sie im Netz nach „Hilberts Hotel“ und erklären Sie das Gedankenspiel mit eigenen Worten. Versuchen Sie, ihre Erkenntnisse auch auf mathematische Weise darzustellen.

Aufgabe 2

a) Beweisen Sie das Distributivgesetz und das Absorptionsgesetz der Booleschen Algebra $\mathfrak{B} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ mithilfe einer Wertetabelle.

b) Sei S die Menge aller Studierenden und D die Menge aller Dozenten. Zusätzlich sei e eine Eigenschaft, die erfüllt (wahr) oder nicht erfüllt (falsch) sein kann, wobei gilt $e(x, y) \Leftrightarrow$ „x hat bei y schon einmal eine Klausur geschrieben”. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in Klarsprache. Negieren Sie sie anschließend und übersetzen Sie sie zurück in symbolische Sprache.

- $\forall s \in S\ \exists d \in D : e(s, d)$
- $\exists d \in D\ \forall s \in S : e(s, d)$

Aufgabe 3

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Die Summe der ersten n natürlichen Quadratzahlen beträgt $\frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

b) Alle Glieder der Folger $a_m = m^3 + 5m$ $(m \in \mathbb{N})$ sind durch 3 teilbar. (*Benutzen Sie zur Übung die Restklassen-Schreibweise*)

c) Es gilt $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 4

Konstruieren Sie je eine nicht-erfüllbare und eine erfüllbare Klauselmenge mit mindestens 2 Variablen. Beweisen Sie die Unerfüllbarkeit mittels eines Resolutionsbeweises.

Aufgabe 5

Tragen Sie in der Tabelle ein, welche Elemente und Regeln in den verschiedenen Zahlenmengen gegeben sind. Beweisen Sie im Anschluss formal, dass die rationalen Zahlen zusammen mit der Addition eine Gruppe bilden (kurz: $(\mathbb{Q}, +)$ bildet eine Gruppe).

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
Inverses bezüglich $+$					
Inverses bezüglich $\cdot$					
Neutrales bezüglich $+$					
Neutrales bezüglich $\cdot$					
Assoziativgesetz					
Distributivgesetz					
Kommutativgesetz					

Aufgabe 6

Finden Sie zum Kripke-Modell $\mathfrak{M}$ aus der Vorlesung (Foliensatz zur Modallogik, S. 9) ein (nicht identisches) Modell $\mathfrak{M}'$, sodass zwischen den beiden Modellen eine Bisimulation existiert. Geben Sie explizit eine Bisimulation an.

Aufgabe 7

Entwickeln Sie auf Basis des Zahlenkreises aus der Vorlesung einen Algorithmus zum Addieren zweier Binärzahlen. Bestimmen Sie außerdem dessen Laufzeit. Was ist in diesem Kontext mit „Überlauf“ gemeint?

Aufgabe 8

a) Beweisen Sie die Rechenregeln für Grenzwerte konvergenter Folgen aus der VL.

b) Formulieren Sie entsprechende Regeln für die Landau-Notation.